Racines carrées

1. Définition

Soit a un nombre positif.
La racine carrée de a, notée $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a.

Pour $a \geq 0$ $\quad (\sqrt{a})^2 = a \qquad \sqrt{a^2} = a$

Exemples :

$0^2 = 0$	donc $\sqrt{0} = 0$	$6^2 = 36$
$1^2 = 1$	donc $\sqrt{1} = 1$	$7^2 = 49$
$2^2 = 4$		$8^2 = 64$
$3^2 = 9$		$9^2 = 81$
$4^2 = 16$	donc $\sqrt{16} = 4$	$10^2 = 100$
$5^2 = 25$		$11^2 = 121$

Attention : $\sqrt{-7}$ n'a pas de sens car –7 est négatif !

Remarques
Certaines racines carrées ne sont pas des nombres entiers ou rationnels (quotients).
On en donne alors une valeur approchée.

Exemple : $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré vaut 2.
$\sqrt{2} \approx 1{,}414$

2. Opérations sur les racines carrées

a et b sont deux nombres positifs ou nuls.

a) *Produit de deux racines carrées*

$$\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$$

Le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée du produit.

Exemple : $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{3 \times 12} = \sqrt{36} = 6$

b) *Quotient de deux racines carrées*

$$\boxed{\textbf{Si } b \neq 0, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

Le quotient de deux racines carrées est égal à la racine carrée du quotient.

Exemple : $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{15}{3}} = \sqrt{5}$

Attention ! Il n'y a **aucune règle générale** pour la somme et la différence de racines carrées.

Exemples :

1. $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ mais $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$
2. $\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$ mais $\sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$
3. $\sqrt{64} - \sqrt{100} = 8 - 10 = -2$ mais $\sqrt{64 - 100}$ n'a pas de sens car 64 – 100 est négatif

3. Simplification d'écriture avec les racines carrées

1) *En faisant sortir les carrés de la racine* (Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$)

Exemple : $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Conséquences :

1) $3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$
2) $\sqrt{7} - 3\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$
3) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ reste inchangé.
4) $3\sqrt{50} - 2\sqrt{18} = 3\sqrt{25 \times 2} - 2\sqrt{9 \times 2}$
$= 3 \times 5\sqrt{2} - 2 \times 3\sqrt{2}$
$= 15\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$
$= 9\sqrt{2}$

2) *En écrivant sans racine au dénominateur* (Ecrire sous la forme $\frac{\sqrt{a}}{b}$)

Exemple : $\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{21}{27}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{7}{3^2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

4. Résoudre l'équation x² = a

Soit l'équation $x^2 = a$

- Si $a < 0$ alors cette équation n'a pas de solution.
- Si $a = 0$ alors cette équation a une solution x = 0.
- Si $a > 0$ alors cette équation a deux solutions : $x = -\sqrt{a}$ et $x = \sqrt{a}$.

Exemples :

$x^2 = -5$	$x^2 = 0$	$x^2 = 7$	$5x^2 = 15$
$-5 < 0$	$x = 0$	$x = \sqrt{7}$ et $x = -\sqrt{7}$	$x^2 = \frac{15}{5}$
S = $\varnothing$	S = { 0 }	S = $\{\sqrt{7} ; -\sqrt{7}\}$	$x^2 = 3$
			$x = \sqrt{3}$ et $x = -\sqrt{3}$
			S = $\{\sqrt{3} ; -\sqrt{3}\}$